TD n°12: Théorie du potentiel

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Exercices à faire en priorité : 1-2-3-4-6-7. Les exercices marqués d'un [1] sont des exercices plus difficiles, plus longs, ou plus loin du cours.

On admettra le théorème suivant, qui sera vu au début du prochain cours :

Théorème (Caractérisation du potentiel logarithmique)**.** *Soit $g : \mathbb{C} \to [-\infty, \infty[$ une fonction semi-continue supérieurement telle que*

(i) g est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus K$,

(ii) $g(z) = \log|z| + O(1)$ quand $z \to \infty$,

(iii) $g(z) \to 0$ quand $z \to \zeta \in \partial K$ pour ζ en dehors d'un ensemble polaire.

Alors

$$g = U_{\mu_K} - I(\mu_K).$$

Une telle fonction est appelée fonction de Green de $\mathbb{C} \setminus K$.

Potentiels et énergie.

Exercice 1. Inégalités énergie-potentiel.
Soit K un compact de $\mathbb{C}$, μ_K sa mesure d'équilibre. Soit également ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{C}$.

1. Démontrer que si $\mathrm{Supp}(\nu) \subseteq K$, alors
$$\inf_K U_\nu \leqslant I(\mu_K).$$
2. Démontrer à l'aide du théorème de Frostman que (sans supposition sur $\mathrm{Supp}(\nu)$), on a
$$\sup_K U_\nu \geqslant I(\mu_K).$$

Exercice 2. Quelques potentiels.

1. Démontrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\int_0^{2\pi} \log\left|z - e^{i\theta}\right| d\theta = 2\pi \log^+ |z|$$
où $\log^+ t$ désigne $\max(\log(t), 0)$ et en déduire $U_{\mu_{a,R}}$ pour $\mu_{a,R}$ la mesure de Lebesgue normalisée du cercle de centre a et de rayon R.
2. Calculer U_μ pour μ la mesure de Lebesgue du disque fermé $\overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 3. Inégalité dans le théorème de Frostman.
Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $E \subseteq \mathbb{C} \setminus K$ polaire tel que $K' = K \cup E$ est compact. Soient $\mu_K, \mu_{K'}$ les mesures d'équilibre de K, K'.

1. Démontrer que $I(\mu_{K'}) > -\infty$.
2. Démontrer que $\mu_{K'}(E) = 0$, et en déduire que $\mu_K = \mu_{K'}$
3. Démontrer que si $K = \overline{\mathbb{D}}$, alors $U_{\mu_{K'}} > I(\mu_{K'})$ sur E. On pourra démontrer que la mesure d'équilibre sur K est alors la mesure de Lebesgue renormalisée sur le cercle.

[1] Merci à Hadrien pour ce raton-laveur en Tikz !

Capacités et diamètres transfinis.

Exercice 4. Quelques capacités.
Pour cet exercice, on admet le résultat de l'exercice 7.

1. Calculer la capacité de l'anneau $r \leqslant |z| \leqslant R$.
2. Calculer en termes de la capacité du segment $[0,1]$ la capacité du hérisson
$$H = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[0, e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right].$$
3. Soit K un compact de $\mathbb{C}$ vérifiant $q^{-1}(K) = K$ pour un polynôme q. Démontrer que soit K est polaire, soit $\mathrm{Cap}(K) = |a_d|^{-\frac{1}{d-1}}$, où d est le degré de q et a_d son coefficient dominant. Utiliser ce résultat pour retrouver la capacité du cercle et du disque.
4. On admet (c'est une généralisation du raisonnement fait dans un TD précédent) que $z \mapsto z + \frac{1}{z}$ envoie $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(0,r)$, $r > 1$, sur $\mathbb{C} \setminus E_{a,b}$, où $E_{a,b}$ est l'ellipse de demi-axes $a = r + 1/r$, $b = r - 1/r$, c'est-à-dire définie par $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leqslant 1$.
Démontrer que pour $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, la capacité de l'ellipse $E_{a,b}$ de demi-axes a, b est
$$\mathrm{Cap}(E_{a,b}) = \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 5. Inégalités de diamètres transfinis.

1. Soient X, Y deux compacts métriques, et $f : X \to Y$ une application A-lipschitzienne surjective. Démontrer que
$$\tau(Y) \leqslant A\tau(X).$$
2. En déduire que $\tau([0,1]) \geqslant \frac{1}{2\pi}$ sans calculer explicitement.

Exercice 6. Capacité et mesure de Lebesgue.
Soit μ une mesure borélienne à support compact sur $\mathbb{C}$ vérifiant $I(\mu) > -\infty$ et E un borélien de $\mathbb{C}$.

1. (a) Supposons que $\mu(E) > 0$. Démontrer qu'il existe un compact $K \subseteq E$ vérifiant $\mu(K) > 0$ et
$$I(\mu|_K) \geqslant I(\mu) - \mu(\mathbb{C})^2 \log(d) + \mu(K)^2 \log(d)$$
où d est le diamètre de K.
   (b) En déduire que E est non-polaire.
2. En déduire qu'un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ (resp. de $\mathbb{R}$, resp. de $\mathbb{T}$) de mesure de Lebesgue > 0 n'est jamais polaire.

Exercice 7. Capacité d'une image inverse par un polynôme.
Soit $q(z) = a_d z^d + ... + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact non-polaire. On note $U = \mathbb{C} \setminus K$, $V = \mathbb{C} \setminus q^{-1}(K)$. On note respectivement g_U et g_V les fonctions de Green de U et V.

1. Vérifier que $q(V) = U$ et $q(q^{-1}(K)^\circ) = K^\circ$, donc $q(\partial q^{-1}(K)) = \partial K$.
2. Vérifier que $g_U(q(z))$, définie sur $\mathbb{C}$, est nulle sur $q^{-1}(K)$ sauf peut-être en un sous-ensemble polaire du bord, et harmonique sur V.
3. En déduire que $g_U(q(z)) = d g_V(z)$.
4. Démontrer que $g_U(z) = \log|z| - \log \mathrm{Cap}(K) + o(1)$.
5. En déduire que
$$\mathrm{Cap}(q^{-1}(K)) = \left(\frac{\mathrm{Cap}(K)}{|a_d|}\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Exercice 8. Capacités de Cantors

Soit $\boldsymbol{s} = (s_n)_n$ une suite de nombres réels strictement compris entre 0 et 1. On définit récursivement $C() = [0,1]$, et

$$C(s_1,...,s_n) = \left(\frac{1-s_1}{2}C(s_2,...,s_n)\right) \cup \left(\frac{1+s_1}{2} + \frac{1-s_1}{2}C(s_2,...,s_n)\right).$$

On définit $C(\boldsymbol{s}) = \bigcap_{n\geqslant 1} C(s_1,...,s_n)$. On pose finalement

$$p = \prod_{n\geqslant 1}(1-s_n)^{\frac{1}{2^n}},\ q = \prod_{n\geqslant 1} s_n^{\frac{1}{2^n}}.$$

Pour cet exercice, on utilisera librement les inégalités (1) et (2) de l'exercice suivant.

1. Démontrer que
$$\log \mathrm{Cap}\left(C(s_1,...,s_n)\right) \leqslant \frac{1}{2}\log \mathrm{Cap}\left(C(s_2,...,s_n)\right) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-s_1}{2}\right).$$
2. En déduire que
$$\log \mathrm{Cap}\left(C(\boldsymbol{s})\right) \leqslant \log(p) - \log(2).$$
3. Similairement, démontrer que
$$\log \mathrm{Cap}\left(C(s_1,...,s_n)\right) \geqslant \frac{1}{2}\log(s_1) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-s_1}{2}\right) + \frac{1}{2}\log \mathrm{Cap}(C(s_2,...,s_n)).$$
4. En déduire que
$$\log \mathrm{Cap}\left(C(\boldsymbol{s})\right) \geqslant \log(pq) - \log(2).$$

Exercice 9. Estimations de capacités

Le but de cet exercice est de prouver deux inégalités : soient K_1, K_2 deux compacts, $K = K_1 \cup K_2$ leur union. On a

$$\frac{1}{\log(\delta/\mathrm{Cap}(K))} \leqslant \frac{1}{\log(\delta/\mathrm{Cap}(K_1))} + \frac{1}{\log(\delta/\mathrm{Cap}(K_2))} \tag{1}$$

et

$$\frac{1}{\log^+(d/\mathrm{Cap}(K))} \geqslant \frac{1}{\log^+(d/\mathrm{Cap}(K_1))} + \frac{1}{\log^+(d/\mathrm{Cap}(K_2))} \tag{2}$$

où δ est le diamètre de K et d la distance entre K_1 et K_2. On note μ la mesure d'équilibre de K et μ_j celle de K_j.

1. On commence par la première inégalité.
   (a) Justifier qu'il suffit de prouver l'inégalité pour $\delta = 1$, et qu'on a alors $\mathrm{Cap}(K) \leqslant 0$.
   (b) Démontrer que pour $j = 1, 2$, on a
   $$I(\mu) \leqslant \int_{\mathbb{C}} U_\mu d\mu_j.$$
   (c) En déduire que
   $$I(\mu) \leqslant \int_{K_j} U_{\mu_j} d\mu.$$
   (d) Démontrer que $\int_{K_j} U_{\mu_j} d\mu = \mu(K_j) I(\mu_j)$.
   (e) En déduire que
   $$-\frac{\mu(K_1)+\mu(K_2)}{I(\mu)} \leqslant -\frac{1}{I(\mu_1)} - \frac{1}{I(\mu_2)}$$
   puis que
   $$\frac{1}{\log(1/\mathrm{Cap}(K))} \leqslant \frac{1}{\log(1/\mathrm{Cap}(K_1))} + \frac{1}{\log(1/\mathrm{Cap}(K_2))}.$$

2. On montre la deuxième inégalité.

   (a) Vérifier qu'il suffit de le prouver pour $d = 1$.

   (b) Vérifier que si $\mathrm{Cap}(K) \geqslant 1$ ou K_j est polaire, l'égalité est trivialement vérifiée. On suppose à partir de maintenant que $0 < \mathrm{Cap}(K_j) \leqslant \mathrm{Cap}(K) < 1$.

   (c) On pose $t = \frac{I(\mu_1)}{I(\mu_1)+I(\mu_2)}$, et
   $$\nu = (1-t)\mu_1 + t\mu_2.$$
   Vérifier que ν est une mesure de probabilité supportée sur K et vérifiant
   $$I(\nu) \geqslant (1-t)^2 I(\mu_1) + t^2 I(\mu_2).$$

   (d) En déduire que
   $$I(\mu) \geqslant \frac{I(\mu_1)I(\mu_2)}{I(\mu_1)+I(\mu_2)}$$
   et conclure.